2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $2i$, $\sqrt{3}+i$ et $\sqrt{3}-i$.

a) Représenter dans le repère les points *A*, *B* et *C*.

b) Montrer que *OABC* est un losange.

3°) Soit *D* le point d'affixe $d=\dfrac{(\sqrt{3}+i)+(-1+i\sqrt{3})\tan\theta}{2}$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Mettre sous forme exponentielle $1+i\tan\theta$.

b) En déduire que : $d=\dfrac{1}{\cos\theta}e^{i(\frac{\pi}{6}+\theta)}$.

c) Déterminer la valeur de θ pour laquelle *A*, *B*, *C* et *D* soient sur un même cercle.

EXERCICE N°5 : 50' 6 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et (-1) .

A tout point M d'affixe z on nul , on associe le point M' d'affixe $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z}$

1°) a) Vérifier que B est le seul point invariant par f

b) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que $f(z)$ est réel

2°) On pose $z=e^{i\theta}$ où $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $|f(z)-z|=|z+1|$

b) Déduire une construction du point M' à partir du point M

c) Montrer que $f(e^{i\theta})=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$

d) Calculer f($\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$) et déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

e) Déterminer θ pour que le triangle OMM' soit un triangle isocèle en O

3°) On pose $z=re^{i\theta}$ où r est un réel >1 et $\theta\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ .Soit I le point d'affixe i

a) Montrer que $|f(z)-1|=r^2+\dfrac{1}{r^2}+2\cos 2\theta$

b) Montrer que si le point M' se déplace sur le cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon 2 le point M se déplace sur un cercle ($\mathscr{C}'$) de centre I dont on précisera son rayon.

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn